

---

# C<sup>1</sup>連続なNURBS境界Gregoryパッチによる複雑な位相を持つ曲線メッシュの接続法

## G<sup>1</sup>Connection around Complicated Curve Meshes by Using C<sup>1</sup> NURBS Boundary Gregory Patches

今野 晃市\*      千代倉 弘明\*\*

Kouichi KONNO      Hiroaki CHIYOKURA

---

### 要 旨

曲線メッシュを用いた自由曲面の設計は、設計者が直感的に形状を設計するためには極めて有効であり、NURBS曲面で曲線メッシュを滑らかに内挿する手法が、曲線メッシュの状態に制約があるものによく使用されている。曲面表現式としてNURBS境界Gregoryパッチを利用し、NURBS曲線から成る曲線メッシュを、曲線メッシュの制約を受けずにG<sup>1</sup>連続に接続し、しかも曲面の内部がC<sup>1</sup>連続になる曲面生成手法を提案した。その際、設計者が形状変形に集中できるようにするために、曲線メッシュを構成する曲線や、メッシュの領域を内挿する曲面式などを意識させないようにした。すなわちNURBS曲線は形状表現の自由度が高く、様々な形状を単一の式で表現できる利点があるため、曲線メッシュをNURBS曲線で表現すれば、設計者は曲線メッシュを構成する様々な曲線のタイプや特性を意識することなく、意図する形状を作成できる。

### ABSTRACT

A method to design complicated free form surfaces using a curve mesh is strongly effective method to design a shape intuitively. The method to connect G<sup>1</sup> continuously with C<sup>1</sup> continuous NURBS boundary Gregory patch representation is proposed so as to avoid the constraint to interpolate the area of curve mesh. The user can concentrate a shape modeling without considering the type of curves in the curve mesh and the equations of surfaces interpolated an area of the curve mesh. One of the merits of using NURBS curve is various shapes can be represented by only the equation. Therefore a user can design curve meshes without taking consideration of type of curves and/or special features.

---

\* 画像システム事業本部  
ソフトウェア技術開発センター ソフトウェア研究所 第三研究室  
Software Research Center,  
Software Technology Development Center, Imaging System Business Group.

\*\* 慶応大学環境情報学部  
Faculty of Environmental Information, Keio University.

## 1. 背景と目的

曲線メッシュを用いた自由曲面の設計手法は、設計者が直感的に形状を設計するためには極めて有効な手法である[1,2]。曲線メッシュは、設計対象となる形状の特徴を表す曲面の境界曲線や断面線などの特徴線で構成されている。曲線メッシュを自由曲面で内挿することによって、設計者の意図する曲面形状を生成することができれば、設計者は曲線形状の変形のみで専念することができるので設計効率が向上する。そのためには、CADシステムが曲線メッシュを構成する曲線や、メッシュの領域を内挿する曲面式を適切に選択し、設計者にこれらの情報を意識させないようにすることが重要である。

NURBS曲線[3,4]は形状表現の自由度が高いため、様々な形状を単一の式で表現できる利点がある。したがって曲線メッシュをNURBS曲線で表現すれば、設計者は曲線メッシュを構成する様々な曲線のタイプや特性を意識することなく、意図する曲線形状を作成することができる。また、NURBS曲線の変形に関する多くの研究成果を利用することもできる。例えば、ノット挿入[5,3,4]のような基本的な操作だけでなく、制御点と重みを同時に変更することで曲線形状を自由に変形する手法[6]も提案されている。一方、NURBS曲面についても、スイープ面やスキニング面などを生成するための手法[7]や、曲面間のブレンディングなど様々な生成手法が提案されているが、NURBS曲面を利用して曲線メッシュを滑らかに内挿する場合、曲線メッシュが規則的(例えば田の字型)でなければならないといったメッシュの状態に制約がある。

不規則な曲線メッシュ[1]を滑らかに内挿するための研究もいくつか提案されている。Chiyokuraらは、不規則な曲線メッシュを $G^1$ 連続に内挿するための曲面表現としてGregoryパッチ[1]、有理境界Gregoryパッチ[8]を提案した。Gregoryパッチや有理境界Gregoryパッチは、曲面の境界横断導関数を $u,v$ 各パラメタ方向で独立に定義できる特徴を持つ。この特徴により、不規則な曲線メッシュを $G^1$ 連続に内挿できる。また、Liuらは、高次のBezier曲面を利用して曲線メッシュを滑らかに内挿する方法を提案している[9]。曲線メッシュを局所的に変形した場合には、 $6 \times 6$ 次のBézier曲面で、大域的に変形した場合には $4 \times 4$ 次のBézier曲面でメッシュを内挿できる。

Chiyokura,Liuが提案したそれぞれの手法では、曲線メッシュを構成する曲線のタイプが(有理)Bezier曲線である場合に有効であり、設計者が曲線メッシュを自由に変形しても曲面間を滑らかに接続することが可能である。しかし、形状に対してフィレット付けや集合演算、自由曲面のオフセットなどの操作を行うと、(有理)Bezier曲線では表現が困難な特徴線が曲線メッシュに現れる。このような場合には、NURBS曲線で特徴線を表現することが多く、曲線メッシュにはNURBS曲線が現れる。GregoryパッチやBézier曲面では、NURBS曲線を曲面の境界とすることは不可能であるため、事実上NURBS曲線からなる曲線メッシュを滑らかに内挿することは困難である。NURBS曲線を含んだ不規則な曲線メッシュを内挿するための曲面式として、NURBS境界Gregoryパッチ[10,11]が提案されている。NURBS境界Gregoryパッチを利用することによって、曲線メッシュの状態に関する制約を受けずに隣接面と $G^1$ 連続になる自由曲面でメッシュを内挿することができる。しかしKonnoらの手法では、NURBS曲線を有理Bezier曲線列に分解して、個々の有理Bezier曲線の両側の面が $G^1$ 連続になるような接続を行なう。そのため、有理Bezier曲線間には関連性がなく、生成されたNURBS境界Gregoryパッチのノットは $C^0$ 連続性を持つものとなる。すなわち、曲線メッシュの形状によっては曲面の内部が数学的に折れた形状が生成される。一般に曲線メッシュモデリングでは、形状が折れている部分には特徴線が存在するが、この場合には、特徴線で囲まれた領域の内部形状が不連続なため設計者が形状を修正することが困難である。また、特徴線で囲まれた領域の内部が滑らかにならないのは設計者の意図とは異なると考えられる。

本論文では、Konnoらが提案したNURBS境界Gregoryパッチによる接続、内挿法を拡張し、内挿面を表すNURBS境界Gregoryパッチのノットが $C^1$ 連続性を持つような接続法について提案する。ノットが $C^1$ 連続であれば、特徴線で囲まれた領域の内部形状は滑らかになるため、前述した問題点は解決することができ、より高品質な曲面を生成することができる。

2章では、本研究の基礎となったNURBS境界Gregoryパッチの表現式と、その特徴について説明する。3章では、NURBS境界Gregoryパッチの接続法と曲面生成法について説明する。4章では、3章で述べる曲面生成法の応用例を示す。

最後に、5章では、研究の成果についてまとめる。

## 2. NURBS境界Gregoryパッチ

本章では、NURBS境界Gregoryパッチの表現式と特徴について説明する。

### 2-1 NURBS境界Gregoryパッチの概念

NURBS境界Gregoryパッチは、一般境界Gregoryパッチ[12]の境界横断導関数をNURBS形式で表現できるように拡張した曲面式である。Fig.1は、NURBS境界Gregoryパッチの概念を示している。NURBS境界Gregoryパッチ $S(u, v)$ は、3枚の曲面により次式のように表される。

$$S(u, v) = S^u(u, v) + S^v(u, v) - S^c(u, v). \quad (1)$$

$S^u(u, v)$ は、NURBS曲線 $C_3$ と $C_1$ 、およびその境界横断導関数 $S^u_u(0, v)$ と $S^u_u(1, v)$ により表現される。同様に、 $S^v(u, v)$ は、NURBS曲線 $C_0$ と $C_2$ 、およびその境界横断導関数 $S^v_v(u, 0)$ と $S^v_v(u, 1)$ により表現される。ここでは、 $S^u(u, v)$ をU曲面、 $S^v(u, v)$ をV曲面と呼ぶ。また、 $S_u$ は、 $\partial S/\partial u$ を表し、 $S_v$ は、 $\partial S/\partial v$ を表す。

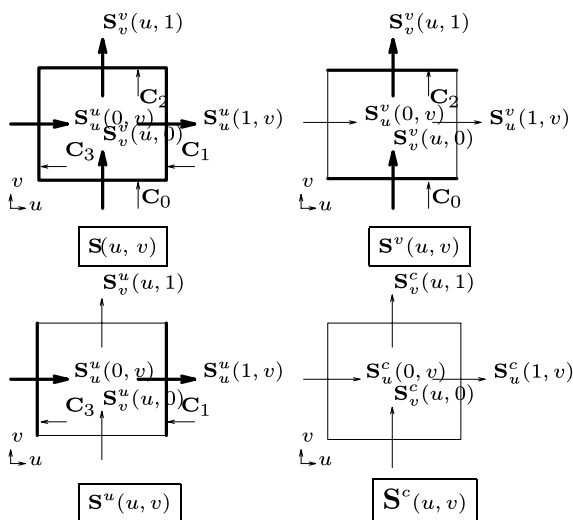


Fig.1 Concept of NURBS Boundary Gregory patch.

$S^c(u, v)$ は、U,V曲面の和をとったときにできる余剰部分を表す曲面で、ここではC曲面と呼ぶ。Fig.1において、太線と太い矢印で示したものが、与えられた境界曲線と境界横断導関数を示し、細線と細い矢印で示したものが、NURBS境界Gregoryパッチを生成する場合の自由度を示している。C

曲面の境界曲線と境界横断導関数は、U,V曲面の自由度を利用して生成される。つまりC曲面はU,Vの2つの曲面の境界曲線と境界横断導関数のうちのシステム内部で作成した部分(細い線で示した部分)から生成される。U,V,C曲面間の関係を調べるため、式(1)にパラメタ値 $u=0,1, v=0,1$ を代入すると次式を導出することができる。

$$\begin{aligned} S^u(u, t_0) &= S^c(u, t_0), \\ S^v_u(u, t_0) &= S^c_v(u, t_0), \\ S^v(t_0, v) &= S^c(t_0, v), \\ S^v_u(t_0, v) &= S^c_u(t_0, v), \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、 $t_0 = 0,1$ とする。

### 2-2 NURBS境界Gregoryパッチの表現式

本節では、2-1節で述べた概念に基づいて、NURBS境界Gregoryパッチの表現式を定式化する。式(1)において、 $S^u$ と $S^v$ はパラメタの方向が異なる同一の式で表現できるので、以下では、 $S^u$ と $S^c$ について説明する。

相対する2本の境界曲線 $C_3$ と $C_1$ は、次式のような $n+1$ 個の制御点をもつNURBS形式で表されるU曲面の境界曲線である。

$$\begin{aligned} C_3(v) &= \frac{\sum_{j=0}^n N_{j,k}(v)w_{0j}P_{0j}}{\sum_{j=0}^n N_{j,k}(v)w_{0j}}, \\ C_1(v) &= \frac{\sum_{j=0}^n N_{j,k}(v)w_{3j}P_{3j}}{\sum_{j=0}^n N_{j,k}(v)w_{3j}}, \end{aligned} \quad (3)$$

ただし、式(3)の $k$ は位数を、 $P_{0j}$ と $P_{3j}$ 、 $w_{0j}$ と $w_{3j}$ は制御点とその重みをそれぞれ表している。

式(3)において、 $N_{j,k}(v)$ は次式のようなB-spline基底関数とする。

$$\begin{aligned} N_{j,0}(v) &= \begin{cases} 1 & \text{if } v_j \leq v < v_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \\ N_{j,l}(v) &= \frac{(v - v_j)N_{j,l-1}(v)}{v_{j+l-1} - v_j} + \frac{(v_{j+l} - v)N_{j+1,l-1}(v)}{v_{j+l} - v_{j+1}} \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $v_j$ は次に示すような正規化されたノットベクトルとする。

$$\begin{aligned}
& \underbrace{[0, \dots, 0]}_{k+1 \text{ 個}}, \underbrace{[v_0, \dots, v_0, \dots]}_{k \text{ 個}}, \\
& \underbrace{[v_j, \dots, v_j, \dots]}_{k \text{ 個}}, \underbrace{[1, \dots, 1]}_{k+1 \text{ 個}}.
\end{aligned} \tag{5}$$

境界横断導関数  $S_u^u(0, v)$ ,  $S_u^u(1, v)$  も境界曲線と同様に NURBS形式で表現される。したがって、U曲面  $S^u$  は、Fig.2に示すようなNURBS曲面となる。

$$S^u(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^n M_{i,3}(u) N_{j,k}(v) w_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^n M_{i,3}(u) N_{j,k}(v) w_{ij}} \tag{6}$$

u方向のノットベクトルは、 $[0,0,0,0,1,1,1,1]$ のように表現され、v方向のノットベクトルは、式(5)のように表現される。議論を簡単にするために、以下では、境界曲線は3次で10個の制御点を持つとする。すなわち、 $k=3$ であり $n=9$ とする。

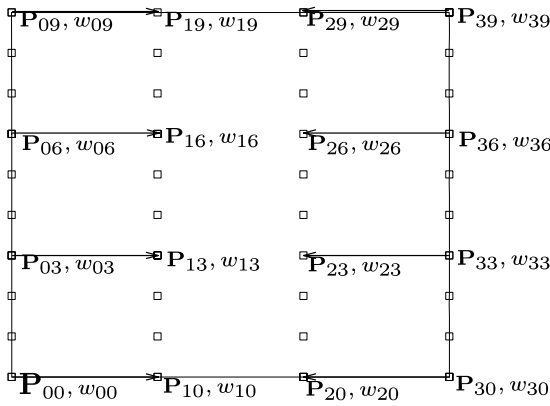


Fig.2 U surface of a NURBS boundary Gregory patch.

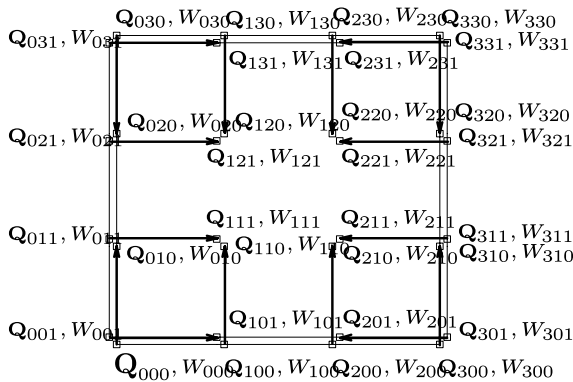


Fig.3 C surface of a NURBS boundary Gregory patch.

C曲面は、U,V曲面から抽出した2枚の双3次有理Bézier曲面をブレンドした式で表現される。有理境界Gregoryパッチ

は、2枚の有理Bezier曲面をブレンドする表現になることが知られているため、本論文では、C曲面の表現式としては、有理境界Gregoryパッチの表現式を利用する(Fig.3)。

$$S^c(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) Q_{ij}(u, v)}{\sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 B_i^3(u) B_j^3(v) W_{ij}(u, v)} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
Q_{ij}(u, v) &= \frac{b_{i/2}(u) W_{ij0} Q_{ij0} + b_{j/2}(v) W_{ij1} Q_{ij1}}{b_{i/2}(u) + b_{j/2}(v)}, \\
W_{ij}(u, v) &= \frac{b_{i/2}(u) W_{ij0} + b_{j/2}(v) W_{ij1}}{b_{i/2}(u) + b_{j/2}(v)},
\end{aligned} \tag{8}$$

ただし、 $b_0(t) = t^2$ ,  $b_1(t) = (1-t)^2$ とする。式(8)において、 $Q_{ijk}$  ( $k=0,1$ )はC曲面の制御点を、 $W_{ijk}$ は重みを示す。また、式(7)の  $B_i^3(u)$  と  $B_j^3(v)$  は次式に示すBernstein多項式である。

$$B_i^3(u) = \binom{3}{i} u^i (1-u)^{3-i}. \tag{9}$$

次に、式(2)の関係式に基づいてU,V,C曲面間の関係性を調べる。Fig.3に示すように、C曲面は32個の制御点と重みにより表現されている。この図からわかるように、制御点はそれぞれ重複している。式(8)に、 $u=0$ と $u=1$ を代入し  $Q_{ij}(u, v)$  と  $W_{ij}(u, v)$  を評価すると制御点  $Q_{ij0}$  と重み  $W_{ij0}$  の項は0になる。同様に、パラメタ  $v=0, v=1$ を代入すると、 $Q_{ij1}$  と  $W_{ij1}$  の項は0になる。その結果、制御点  $Q_{ij0}$  と重み  $W_{ij0}$  はU曲面から、 $Q_{ij1}$  と  $W_{ij1}$  はV曲面から得ることによりNURBS境界Gregoryパッチの3枚の曲面間の整合性がとれることがわかる。より具体的に関係性を示すために、C曲面の制御点と重み  $Q_{ij0}, W_{ij0}$  とU曲面の制御点と重み  $P_{ij}, w_{ij}$  の関係式を導出する方法について説明する。式(2)により、C曲面の境界曲線を表す制御点はU曲面の同じ位置にある制御点をそのまま利用する。つまり、 $W_{i00} = w_{i0}, W_{i30} = w_{i9}, Q_{i00} = P_{i0}, Q_{i30} = P_{i9}, (i=0, \dots, 3)$ とする。また、境界横断導関数  $S_v^c(u, 0)$  と  $S_v^u(u, 0)$  は、次式のような有理式で表される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_v^u(u, 0) &= \frac{1}{v_0 \left( \sum_{i=0}^3 B_i(u) w_{i0} \right)^2} \left( \sum_{i=0}^3 B_i(u) \right) \\
&\quad (w_{i1} \mathbf{P}_{i1} - w_{i0} \mathbf{P}_{i0}) \\
&\quad \sum_{i=0}^3 B_i(u) w_{i0} - \\
&\quad \sum_{i=0}^3 B_i(u) (w_{i1} - w_{i0}) \\
&\quad \sum_{i=0}^3 B_i(u) w_{i0} \mathbf{P}_{i0},
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_v^c(u, 0) &= \frac{1}{\left( \sum_{i=0}^3 B_i(u) W_{i00} \right)^2} \left( \sum_{i=0}^3 B_i(u) \right) \\
&\quad (W_{i10} \mathbf{Q}_{i10} - W_{i00} \mathbf{Q}_{i00}) \\
&\quad \sum_{i=0}^3 B_i(u) W_{i00} - \\
&\quad \sum_{i=0}^3 B_i(u) (W_{i10} - W_{i00}) \\
&\quad \sum_{i=0}^3 B_i(u) W_{i00} \mathbf{Q}_{i00},
\end{aligned} \tag{11}$$

ただし、 $v_0$  はU曲面の $\mathbf{P}_{03}$ 位置におけるノットとする。u方向の境界曲線の制御点は同一でありその重み $W_{i00}$ は、 $w_{i0}/v_0$ と仮定すると、未知数は $\mathbf{Q}_{i10}$ 、 $W_{i10}$ 、 $\mathbf{Q}_{i20}$ 、と $W_{i10}$ となる。境界条件は式(2)で与えられているので、未知数の関係式を次のように導出することができる。

$$\begin{aligned}
W_{i10} \mathbf{Q}_{i10} &= w_{i0} \mathbf{P}_{i0} + \frac{1}{v_0} \\
&\quad (w_{i1} \mathbf{P}_{i1} - w_{i0} \mathbf{P}_{i0}), \\
W_{i10} &= w_{i0} + \frac{1}{v_0} (w_{i1} - w_{i0}),
\end{aligned} \tag{12}$$

ただし、 $i=0, \dots, 3$ とする。同様の方法により、 $\mathbf{Q}_{i20}$ と $W_{i20}$ も次式のように得ることができる。

$$\begin{aligned}
W_{i20} \mathbf{Q}_{i20} &= w_{i3} \mathbf{P}_{i3} + \frac{1}{1-v_1} \\
&\quad (w_{i2} \mathbf{P}_{i2} - w_{i3} \mathbf{P}_{i3}), \\
W_{i20} &= w_{i3} + \frac{1}{1-v_1} (w_{i2} - w_{i3}),
\end{aligned} \tag{13}$$

ただし、 $v_1$  はU曲面の $\mathbf{P}_{06}$ におけるノットとする。V曲面とC曲面間の関係式も同様の方法で導出すると、 $\mathbf{Q}_{ij1}$ 、 $W_{ij1}$ をV曲面から得ることができる。C曲面の制約条件は、4隅の制御点が一致していることである。このとき、4隅の制御点の重みは一致している必要はない。

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{000} &= \mathbf{Q}_{001}, & \mathbf{Q}_{300} &= \mathbf{Q}_{301}, \\
\mathbf{Q}_{030} &= \mathbf{Q}_{031}, & \mathbf{Q}_{330} &= \mathbf{Q}_{331}.
\end{aligned} \tag{14}$$

## 2-3 NURBS境界Gregoryパッチの特徴

NURBS境界Gregoryパッチは次のような特徴を持つ。

- u,vパラメタ方向で独立な境界横断導関数を定義できる。C曲面は式(2)を満たすようにU,V曲面から構築する。よって、C曲面の境界横断導関数はU,V2つの曲面から拘束されるが、これらを独立に定義することができる。たとえば、パラメタ値 $u=0$ のときには、 $\mathbf{S}_u(0, v)$ は $\mathbf{S}_u^u(0, v)$ と一致する。この特徴によって、不規則な曲線メッシュが与えられたときにも各パラメタ方向で滑らかに曲面間を接続することができる。接続の詳細については、3章で説明する。
- 境界曲線ごとに独立に形状を変形することができる。
- Gregory型曲面やNURBS曲面と滑らかに接続することができる。
- 境界曲線は、NURBS曲線で表現される。
- NURBS曲面に正確に変換することができる。

## 3. NURBS境界Gregoryパッチ間の接続法

本章では、境界曲線を共有する2枚のNURBS境界Gregoryパッチ間を $G^1$ 連続に接続し、境界横断導関数が $C^1$ 連続になるような曲面間の接続手法について以下の接続過程に沿って説明する。

- 位相要素の解析
- 基礎パッチの生成
- $C^1$ 連続性を考慮した接続式の導出
- 曲面の制御点の発生

### 3-1 位相要素の解析

本節では、2曲面間を $G^1$ 連続に接続するために、設計者が作成した曲線メッシュからどのような情報を抽出して利用するのかについて説明する。設計者は、ここで得られる情報が曲面を生成する上でどのように利用されるのかを理解することによって、意図する曲面形状を作成することができる。

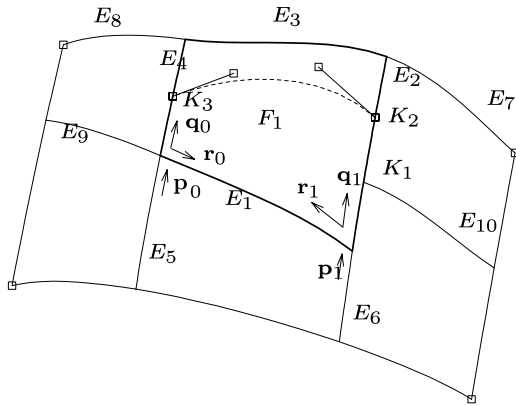


Fig.4 A curve mesh.

Fig.4は、内挿される面の境界曲線に着目したときに得られる情報を示している。本論文では、 $C^1$ 連続なNURBS曲線を曲面の境界曲線とするメッシュを想定する。面 $F_1$ に着目したとき、太線で示されている $E_i (i=1, \dots, 4)$ が隣接面との共有境界曲線である。同様に曲線 $E_j (j=5, \dots, 9)$ は、共有境界曲線の両端点につながっている曲線である。

曲線 $E_2$ は、2つの中間ノットを持ち、 $K_1, K_2$ が曲線の中間ノットの位置を示す。ノット位置 $K_1$ では、曲線 $E_{10}$ により隣接面が2つに分割されている。このように、共有境界曲線の任意の位置を始点とする曲線で隣接面を分割した場合、共有境界上の始点を $T$ 節点[13]と呼ぶ。

また、ノット位置 $K_2, K_3$ では、境界を横切る微分ベクトルが付加されている。このベクトルは、制御ベクトル[12]と呼ばれ、ノット位置における曲面の接平面を制御するためのベクトルである。

以上のことから、2曲面間の共有境界曲線においては次のような情報を得ることができる。

- ・共有境界曲線の両端点につながる曲線。

境界曲線の両端点につながる曲線は、境界曲線の両端点における接平面を規定するための情報として利用される。Fig.4に示すように、曲線 $E_1$ の端点につながる曲線 $E_2, E_4, E_5, E_6$ の接線ベクトル $p_0, q_0, r_0$ で規定される2つの接平面が一致し、 $p_1, q_1, r_1$ で規定される2つの接平面が一致している場合には、2枚の曲面間を $G^1$ 連続に接続する。このような連続性判定を行なうことは、設計者が隣接面となめらかな曲面を発生したい場合には、共有境界曲線の両端における接平面が一致するように曲線メッシュを修正すれば良いことを示している。

- ・共有境界曲線の中間ノットの位置でつながる曲線または制御ベクトル。

境界曲線 $E_2$ の中間ノットの位置 $K_1$ は $T$ 節点であり、 $T$ 節点につながる曲線 $E_{10}$ を得ることができる。また、 $K_2$ には制御ベクトルが付加されている。 $T$ 節点につながる曲線の端点における接線ベクトルや制御ベクトルは、設計者が曲面形状を変形するために意図的に指定したものと解釈する。つまり、接線ベクトルや制御ベクトルが定義される中間ノット位置において、曲面の境界を横切る方向の微分ベクトルと接線ベクトルや制御ベクトルの方向が一致するように、内挿面を生成する。

我々の方法では、上記のように位相要素から内挿に必要な情報を抽出する。したがって、設計者は曲線形状や制御ベクトルの変更と曲面形状の変化の関係をj知ることj、意図する形状を得ることができる。

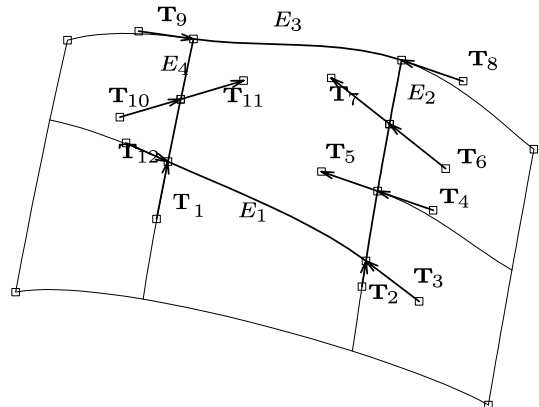


Fig.5 Result of traversing the curve mesh.

Fig.5に示すように、Fig.4の面 $F_1$ の位相要素を解析した結果、 $F_1$ を内挿するときの曲面の境界曲線 $E_i (i=1, \dots, 4)$ と $T$ 節点での接線ベクトル $T_i (i=3, 4, 5)$ や制御ベクトル $T_i (i=6, 7, 10, 11)$ 、隣接面との連続性を規定するベクトル $T_i (i=1, 2, 8, 9, 12)$ を得ることができる。

### 3-2 基礎パッチの生成

3-1節で示した曲線と制御ベクトルの情報を利用して、基礎パッチ[14]を生成する手法について説明する。基礎パッチ法とは、2枚の曲面 $S^1$ と $S^2$ を接続する場合に、共有境界曲線上に仮想的なパッチを想定し、そのパッチと $S^1, S^2$ を別々に接続することによって、結果的には2曲面間を $G^1$ 連続に接続する手法である。このとき、共有境界曲線上に想定した仮想

的なパッチを基礎パッチと呼ぶ。基礎パッチ法を利用することによって、曲面 $S^1$ に $S^2$ を接続する場合と、曲面 $S^2$ に $S^1$ を接続する場合とで同じ次数の境界横断導関数を生成することができる。すなわち、曲面を接続する順番に次数が依存しない。接続の詳細は、3-3節で説明する。

基礎パッチは、3-1節で述べたような曲線メッシュの解析結果である境界曲線と境界曲線のまわりのベクトルから生成する。例えばFig.6は、Fig.4の境界曲線 $E_4$ に着目したときに、その両側の面の接続に関するベクトルを抽出したものである。 $b_0^0$ は境界曲線 $E_1$ の端点における接線ベクトル、 $b_0^1$ は境界曲線 $E_4$ のパラメータ値 $v_0$ の位置に付加されている制御ベクトル、 $b_0^2$ は境界曲線 $E_3$ の端点における接線ベクトルをそれぞれ示している。また、 $c_0^0$ は境界曲線 $E_9$ の端点における接線ベクトル、 $c_0^2$ は境界曲線 $E_8$ の端点における接線ベクトルをそれぞれ示している。 $c_0^1$ は境界曲線 $E_4$ に付加されている制御ベクトル $b_0^1$ と対になる制御ベクトルであり、 $E_4$ 上の同一位置にペアで存在する。これらのベクトルは必ず互いに平行になる関係を持つ。

まず、ベクトル $b_0^i, c_0^i$ から基礎パッチを生成するための流れを説明する。基礎パッチ $a(v)$ は、式(15)で示すようなB-spline形式で表現される。

$$a(v) = \sum_{l=0}^n N_{l,k}(v) a_j^i. \quad (15)$$

$N_{l,k}$ は式(4)に示したB-spline基底関数とする。また、 $l=k-i+j$ とする。

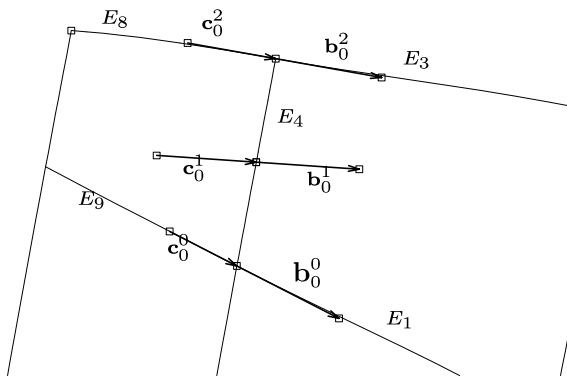


Fig.6 Tangent vector around the edge  $E_4$ .

Fig.6に示したベクトルから基礎パッチの要素 $a_j^i$ を次式のように決定する。簡単のために、 $a(v)$ の次数を2次とし、ノットベクトルは $[0,0,0,v_0,v_0,1,1,1]$ であるとする。 $v_0$ が制

御ベクトル $b_0^1$ と $c_0^1$ が設定されている境界曲線上のパラメータである。

$$a_0^0 = \frac{b_0^0 + c_0^0}{|b_0^0 + c_0^0|}, \quad (16)$$

$$a_0^1 = \frac{b_0^1 + c_0^1}{|b_0^1 + c_0^1|}, \quad (17)$$

$$a_0^2 = \frac{b_0^2 + c_0^2}{|b_0^2 + c_0^2|}. \quad (18)$$

上に示した以外の基礎パッチの要素 $a_1^0, a_1^1$ は、ノット位置 $v_0$ において基礎パッチが $C^1$ 連続になるように $a_0^i$  ( $i=0,1,2$ )から補間する。中間に複数のノットが存在するケースでは、2次の基礎パッチでは、 $C^1$ 連続にできないことがある。その場合には、基礎パッチの次数を3次にし、自由度をあげればよい。

文献[10]では、基礎パッチにBézier表現を利用しており、ベクトル $a_1^0$ は、 $a_0^0$ と $a_0^1$ から、 $a_1^1$ は $a_0^1$ と $a_0^2$ からそれぞれ独立に補間されていた。そのため、基礎パッチ間の連続性は、 $C^0$ 連続となりそこから生成される曲面も $C^0$ 連続になっていた。本節で提案した基礎パッチの生成手法では、基礎パッチの連続性を $C^1$ 連続とし、このような基礎パッチを利用して $C^1$ 連続性を意識した接続方法を提案する。

### 3-3 連続性を考慮した接続式の導出

本節では、隣接面との $G^1$ 連続になる条件を満たし、 $C^1$ 連続な境界横断導関数を生成するための接続式を導く。

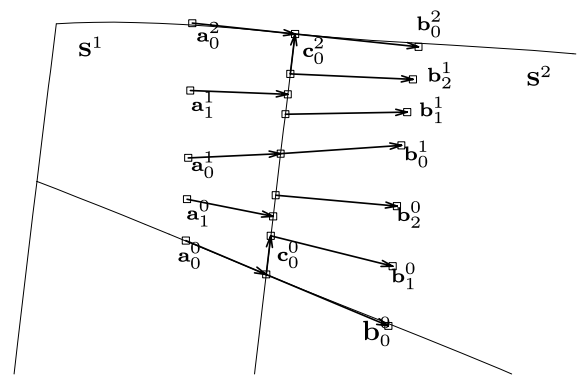


Fig.7 Cross Boundary Derivative.

Fig.7は、Fig.4の境界曲線 $E_4$ の回りを拡大したものである。境界曲線 $E_4$ は3次のNURBS曲線で、中間にひとつノットが存在する。そのノット位置には制御ベクトルが付加されている。

2曲面間の接続を行なうときに、境界曲線上の制御点を持つ重みとその制御点につながる曲面の制御点を持つ重みを一致させることによって、有理曲線を境界とする2曲面間の接続問題を多項式曲線間の接続問題に置き換えて考えることができる[8]。そこで、境界曲線が多項式のときに境界横断導関数が $C^1$ 連続となり、隣接面と $G^1$ 連続に接続するための接続式を導く。接続式は、3-2節で求めた基礎パッチを用いて導出する。

Fig.7において、 $\mathbf{a}_j^i$  は基礎パッチを定義するためのベクトル、 $\mathbf{b}_j^i$  は制御点間ベクトルとし、基礎パッチと曲面を接続する。以下にその過程を示す。

#### $G^1$ 連続性の十分条件

基礎パッチは仮想的な境界横断導関数を表し、式(15)に示すようにベクトル $\mathbf{a}_j^i$ の区分多項式で表現される。同様に、曲面 $S^2$ の境界横断導関数は、 $\mathbf{b}_j^i$ の区分多項式で次式のように表現する。

$$\mathbf{b}(v) = \sum_{l=0}^m N_{l,k}(v) \mathbf{b}_j^i. \quad (19)$$

$N_{l,k}$  は式(4)に示したB-spline基底関数とする。また、 $l=k+j$ とする。また、2章で述べたように、NURBS境界Gregoryパッチは境界横断導関数を各パラメタ方向で独立に定義することができる特徴をもっている。よって、2枚の曲面を $G^1$ 連続に接続する場合、U曲面のみの接続を行えば十分である。このことから、曲面間が $G^1$ 連続であるための十分条件は、次のように記述することができる。

$$\mathbf{b}(v) = k(v) \mathbf{a}(v). \quad (20)$$

$\mathbf{a}(v)$  は基礎パッチを表し、 $\mathbf{b}(v)$  は曲面の境界横断導関数を表す。また、 $k(v)$  はスカラー関数とする。

関数 $\mathbf{b}(v)$  が $C^1$ 連続であるための条件

曲面 $S^2$ の境界横断導関数 $\mathbf{b}(v)$  が $C^1$ 連続になる条件は、境界曲線の間ノット位置Pで、次式を満たせば十分である。

$$\mathbf{b}_0^{i+1} = (1 - t_{i+1}) \mathbf{b}_2^i + t_{i+1} \mathbf{b}_1^{i+1}. \quad (21)$$

ただし、 $t_{i+1}$  は、境界曲線の節点Pにおけるノットの差分  $t_{i+1} = v_{i+1} - v_i$  とする。

境界曲線の両端における条件

境界曲線の両端点では、境界を横切る微分ベクトル  $\mathbf{a}_0^0, \mathbf{b}_0^0, \mathbf{a}_0^2, \mathbf{b}_0^2$  が境界曲線の端点につながる曲線からすでに決まっている。また、共有境界曲線の両端の接線ベクトルを  $\mathbf{c}_0^0, \mathbf{c}_0^2$  とすれば、これらのベクトルと境界を横切る微分ベク

トルから、両端点の接平面が得られる。3-1節で述べたように、端点において2曲面の接平面がそれぞれ一致していれば $G^1$ 連続に接続する。ここで、境界を横切る微分ベクトル  $\mathbf{a}_0^0, \mathbf{b}_0^0$  と  $\mathbf{a}_0^2, \mathbf{b}_0^2$  がそれぞれ平行になるように基礎パッチを設定することによって式(20)から $G^1$ 連続の端点の条件式が得られる。

$$\mathbf{b}_0^0 = k_0^0 \mathbf{a}_0^0 \quad (22)$$

$$\mathbf{b}_0^2 = k_0^2 \mathbf{a}_0^2 \quad (23)$$

ただし、 $k_0^0, k_0^2$  は正の実数とする。

中間ノットの位置における $G^1$ 連続の十分条件

中間ノットの位置Pでは、境界を横切る断面線の接線ベクトル $\mathbf{b}_0^1$ が規定される。よって、2曲面を $G^1$ 連続に接続するためには、この位置における2曲面の接線ベクトルが $G^1$ 連続になる必要がある。接線ベクトルが $G^1$ 連続になるための条件式は次式のように記述できる。

$$\mathbf{b}_0^1 = k_0^1 \mathbf{a}_0^1 \quad (24)$$

ただし、 $k_0^1$  は正の実数とする。

その他の制御点の $G^1$ 連続の十分条件

ノット間の曲線セグメントは、有理Bézier曲線で表現できる。よって、共有境界曲線の部分曲線となる有理Bézier曲線セグメントの両側で $G^1$ 連続の条件式を解くことによって、2曲面間を $G^1$ 連続にすることができる[10]。有理Bezier曲線を境界とする2枚の曲面間を $G^1$ 連続にするための条件は、次式のように記述することができる。

$$\mathbf{b}_1^0 = \frac{2}{3} k_0^0 \mathbf{a}_1^0 + \frac{1}{3} k_0^1 \mathbf{a}_0^0, \quad (25)$$

$$\mathbf{b}_2^0 = \frac{2}{3} k_0^1 \mathbf{a}_1^0 + \frac{1}{3} k_0^0 \mathbf{a}_0^0, \quad (26)$$

$$\mathbf{b}_1^1 = \frac{2}{3} k_0^0 \mathbf{a}_1^1 + \frac{1}{3} k_0^1 \mathbf{a}_0^1, \quad (27)$$

$$\mathbf{b}_2^1 = \frac{2}{3} k_0^1 \mathbf{a}_1^1 + \frac{1}{3} k_0^0 \mathbf{a}_0^1. \quad (28)$$

関数 $\mathbf{a}(v)$  が連続であるための条件

曲面 $S^1$ の境界横断導関数 $\mathbf{a}(v)$  が $C^1$ 連続になる条件は、境界曲線のノット位置Pで、次式を満たせば十分である。

$$\mathbf{a}_0^{i+1} = (1 - t_{i+1}) \mathbf{a}_1^i + t_{i+1} \mathbf{a}_1^{i+1}. \quad (29)$$

ただし、 $t_{i+1}$  は、境界曲線の節点におけるノットの差分



$t_{i+1} = v_{i+1} - v_i$ とする.

以上の関係式において、未知数は、

$k_0^0, k_0^1, k_0^2, b_1^0, b_2^0, b_1^1, b_2^1$ である. これらの未知数の計算法を以下に示す.

- (1) 式(22),(23)により,  $k_0^0, k_0^2$ を得る.
- (2) 境界曲線上のノット位置におけるノットの差分  $t_i$  とノット位置の境界を横断する接線ベクトルの大きさ  $k_0^i$  の関係式は, 次式で与えられる(導出の過程は付録を参照のこと).

$$\mathbf{TK} = 0,$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} (1-t_1) & 1 & t_1 & & & \\ & (1-t_2) & -1 & t_2 & & \\ & \dots & & & & \\ & & (1-t_i) & -1 & t_i & \\ & & \dots & & & \\ & & & (1-t_{m-2}) & -1 & t_{m-2} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\mathbf{K} = [k_0^0, k_0^1, \dots, k_0^i, \dots, k_0^{m-1}]^T. \quad (31)$$

まず, 式(30)を利用して, 接線ベクトルの大きさ  $k_0^i$  を求める. このとき,  $k_0^0, k_0^2$  は式(22),(23)により既知である.

(3)基礎パッチ  $a(v)$  は, 3-2節で述べた方法で得ることができるので, 式(25)から式(28)までを利用し  $k_j^i$  と基礎パッチから, 内部制御点を求める.

以上のような過程で, 隣接面と  $G^1$ 連続に接続し  $C^1$ 連続な境界横断導関数を得ることができる.

### 3-4 曲面の制御点の発生

本節では, 3-3節で導出した接続式を利用して, 曲面の制御点を発生する方法について述べる. Fig.8は, Fig.4の面  $F_1$  の境界横断導関数から発生した制御点を示した図である. 面  $F_1$  の境界曲線  $E_2$  は, 中間ノット位置に2つの接線ベクトルが存在するので,  $C^1$ 連続な基礎パッチを生成するためにはその次数を3次にし, 接続式により得られる境界横断導関数の次数は4次になる. したがって, Fig.8では4次の境界横断導関数を示した.

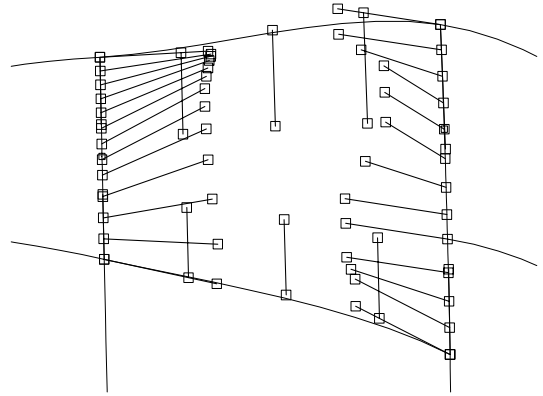


Fig.8 Control points generated by joining equations.

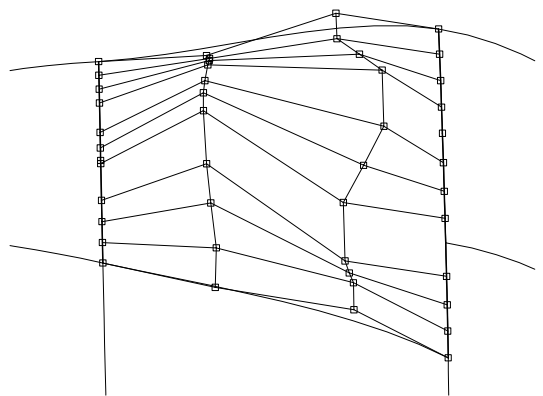


Fig.9 Control points of U surface.

Fig.8に示した境界横断導関数から, NURBS境界GregoryパッチのU, V, C曲面を得るためには, まず相対する境界曲線に着目し, Fig.2に示すNURBS境界GregoryパッチのUまたはV曲面を得る. その後, 式(12),(13)によりC曲面の内部制御点を得る. Fig.9は, 境界曲線  $E_2, E_4$  に着目し, これらの境界横断導関数から得たNURBS曲面(U曲面)の制御点を示した.

## 4. NURBS境界Gregoryパッチの生成例

本章では, NURBS境界Gregoryパッチの生成手法に基づいて曲線メッシュを内挿した例を示す. Fig.10は, 複数のT節点を曲面の境界曲線にもつメッシュを表している. 面  $F_1$  を文献[10]で提案された手法で内挿し, 中間ノット位置のパラメータ線を細い点線で示し, 境界曲線とパラメータ線上の法線ベクトルを表示した. パラメータ線上の法線ベクトルは, 内挿された曲面をパラメータで分割した後, それぞれの曲面

から計算したものである。Fig.10では、パラメータ線上の法線ベクトルが同じ位置に2つ表示されている箇所があり、この部分で曲面が折れていることを示している。同様の計算を、本論文で提案した手法を用いて行なったものがFig.11である。パラメータ線上で、法線ベクトルが一致していることから滑らかな曲面が生成されていることがわかる。

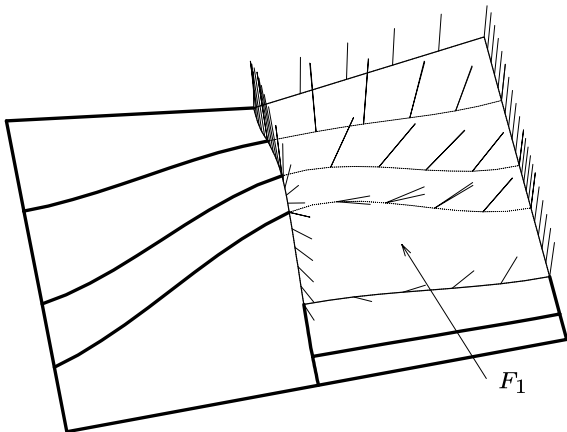


Fig.10 Normal vectors of interpolated surfaces with the former method.

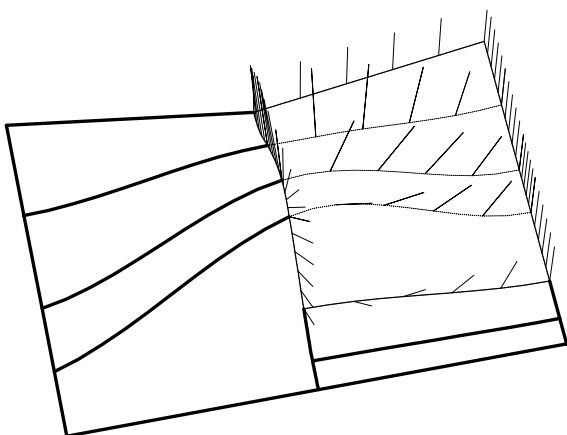


Fig.11 Normal vectors of interpolated surfaces with the proposed method.

Fig.12は、本手法で内挿したU曲面の制御点を示している。面 $F_1$ の境界曲線 $E_1$ では、中間に3つのT節点を持ち、面 $F_2$ の境界曲線 $E_2$ では、中間に2つのT節点を持つケースである。面 $F_1$ に着目すると、4本の3次Bézier曲線をセグメントとするNURBS曲線が共有境界曲線であり、境界横断関数は、4次で表現される。境界横断関数を表す制御点数は14個あり、ノットベクトルは、

$$\begin{aligned} & [0, 0, 0, 0, 0, \\ & 0.278654, 0.278654, 0.278654, \\ & 0.454570, 0.454570, 0.454570, \\ & 0.727285, 0.727285, 0.727285, \\ & 1, 1, 1, 1, 1] \end{aligned} \quad (33)$$

のようになっている。NURBSの性質により、境界横断関数は $C^1$ 連続性を持っていることがわかる。同様に面 $F_2$ の境界曲線 $E_2$ においても、境界横断関数を表す制御点数は11個あり、ノットベクトルは、

$$\begin{aligned} & [0, 0, 0, 0, 0, \\ & 0.433749, 0.433749, 0.433749, \\ & 0.759384, 0.759384, 0.759384, \\ & 1, 1, 1, 1, 1] \end{aligned} \quad (34)$$

のようになっていることから、境界横断関数は $C^1$ 連続性を持っていることがわかる。

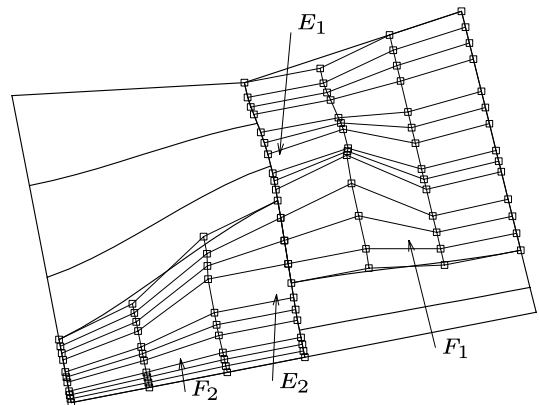


Fig.12 Control points of U surfaces.

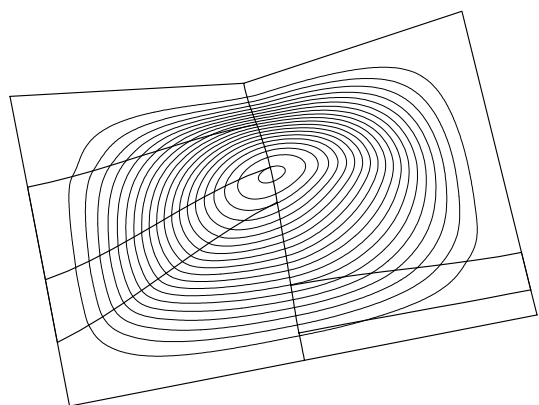


Fig.13 Cross sections of the NURBS boundary Gregory patches.

Fig.13には、Fig.12で内挿した曲面の断面線を示した。共有境界曲線において断面線が滑らかに接続されていることから、曲面間は $G^1$ に接続されていることがわかる。

## 5. 成果

複雑な位相構造を持つ曲線メッシュを $G^1$ 連続に内挿する手法を示した。従来は内挿された曲面の内部の連続性が $C^0$ 連続であったが、我々が提案した方法を用いることによって、隣接する曲面と $G^1$ 連続に接続でき、しかも内挿された曲面の連続性を $C^1$ 連続にすることができるようになった。

### 参考文献

- 1) H.Chiyokura and F.Kimura: Design of Solids with Free-form Surfaces, *Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH 83)*, Vol. 17, No 3, (1983), pp. 289-298.
- 2) H.Chiyokura: Localized Surface Interpolation for Irregular Meshes, *Advanced Computer Graphics (Proc. Computer Graphics Tokyo '86)* (Kunii, T. L.(ed.)), Springer-Verlag, Tokyo, (1986), pp. 3-19.
- 3) G.Farin: *NURB Curves and Surfaces from Projective Geometry to Practical Use*, A K Peters,Ltd., Wellesley, Massachusetts,(1995).
- 4) L.Piegl and W.Tiller: *The NURBS Book*, Springer-Verlag, Heidelberg,(1995).
- 5) W.Boehm: Inserting New Knots into B-Spline Curves, *Computer Aided Design*, Vol. 12, No 4, (1980), pp. 199-201.
- 6) C.K.Au and M.M.F.Yuen: Unified Approach to NURBS Curve Shape Modification, *Computer Aided Design*, Vol. 27, No 2, (1995), pp. 85-93.
- 7) F.Lin and W.T.Hewitt: Expressing Coons-Gordon Surfaces as NURBS, *Computer Aided Design*, Vol. 26, No 2, (1994), pp. 145-155.
- 8) H.Chiyokura, et al.: Surface Interpolation over Irregular Meshes with Rational Curves, *NURBS for Curve and Surface Design* (Farin, G.(ed.)), SIAM, Philadelphia, (1991), pp. 15-34.
- 9) Q.Liu and J.C. Sun: Interpolation of mesh curves, *Computer Aided Design*, Vol. 26, No 4, (1994), pp. 259-267.
- 10) 今野晃市, 千代倉弘明: NURBS境界Gregoryパッチによる自由曲面形状の内挿方法, 情報処理学会論文誌, 第35巻, 第10号,(1994),pp.2203-2213.
- 11) K.Konno and H.Chiyokura: An Approach of Designing and Controlling Free-Form Surfaces by Using NURBS Boundary Gregory Patches, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 13, No 9, (1996), pp. 825-849.

- 12) K.Konno, T.Takamura, and H.Chiyokura: A New Control Method for Free-Form Surfaces with Tangent Continuity and its Applications, *Scientific Visualizations of Physical Phenomena* (Patrikalakis, N. M.(ed.)), Springer-Verlag, Heidelberg, (1991), pp. 435-456.
- 13) H.Chiyokura: *Solid modelling with DESIGNBASE*, Addison Wesley, Reading, MA,(1988).
- 14) H.Chiyokura and F.Kimura: A New Surface Interpolation Method for Irregular Curve Models, *Computer Graphics Forum*, Vol. 3, No 3, (1984), pp. 209-218.

[接続式の導出過程]

1. 式(22),(23)により,  $k_0^0, k_0^2$ を得る.
2. 関数 $b(v)$ は $C^1$ であるので, 式(21),(24)から

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^1 &= (1-t_1)\mathbf{b}_2^0 + t_1\mathbf{b}_1^1 \\ &= k_0^1\mathbf{a}_0^1, \end{aligned} \quad (35)$$

と書ける.

3. 式(35)に式(26),(27)を代入する.

$$\begin{aligned} &(1-t_1)\left(\frac{2}{3}k_0^1\mathbf{a}_1^0 + \frac{1}{3}k_0^0\mathbf{a}_0^1\right) + \\ &t_1\left(\frac{2}{3}k_0^0\mathbf{a}_1^1 + \frac{1}{3}k_0^1\mathbf{a}_0^1\right) \\ &= k_0^1\mathbf{a}_0^1. \end{aligned} \quad (36)$$

$a$ の関数は $C^1$ なので, 式(29)を利用して, 式(36)を整理すると, 次のような式が得られる.

$$\begin{aligned} &(1-t_1)\frac{1}{3}k_0^0\mathbf{a}_0^1 + (1-t_1)\frac{2}{3}k_0^1\mathbf{a}_1^0 + \\ &t_1\frac{2}{3}k_0^1\mathbf{a}_1^1 - k_0^1\mathbf{a}_0^1 + t_1\frac{1}{3}k_0^2\mathbf{a}_0^1 = 0, \\ &\frac{1}{3}((1-t_1)\mathbf{a}_0^1)k_0^0 + \frac{1}{3}(2(1-t_1)\mathbf{a}_1^0 + \\ &2t_1\mathbf{a}_1^1 - 3\mathbf{a}_0^1)k_0^1 + \frac{1}{3}(t_1\mathbf{a}_0^1)k_0^2 = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

$$(1-t_1)\mathbf{a}_0^1k_0^0 - \mathbf{a}_0^1k_0^1 + t_1\mathbf{a}_0^1k_0^2 = 0,$$

$$((1-t_1)k_0^0 - k_0^1 + t_1k_0^2)\mathbf{a}_0^1 = 0.$$

式(37)を一般化する. 境界の両端点を含めた $m$ 個の節点が境界上に現れるときには, 次のような関係式が導ける.

$$\begin{aligned} &(1-t_1)k_0^0 - k_0^1 + t_1k_0^2 = 0, \\ &(1-t_2)k_0^1 - k_0^2 + t_2k_0^2 = 0, \\ &(1-t_i)k_0^{i-1} - k_0^i + t_ik_0^{i+1} = 0, \\ &(1-t_{m-2})k_0^{m-3} - k_0^{m-2} + \\ &t_{m-2}k_0^{m-1} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

式(38)を行列で表現すると, 式(30)が得られる.